מבחן סופי - 104016 18 ביולי 2010

♣ משך המבחן 3 שעות. ♣ חומר סגור. ♣ שימוש במחשבונים: לא מותר.
♣ במבחן זה יש 10 שאלות.

♣ שאלות 1,2,3,4,5,6: multiple choice, ביחד 60 נקודות.
♣ מתוכן יש 4 שאלות שלהן שתי תשובות נכונות.
♣ מתוכן יש 2 שאלות שלהן יש תשובה נכונה אחת.
♣ בסך הכל יש 10 תשובות נכונות.
♣ ענה על כל השאלות בסימון X במשבצת המתאימה.
♣ רק Xים בטבלה בדף הזה ייבדקו.
♣ דרך פתרון לא תבדק. הדפים 2, 3, 4 לא יבדקו.
♣ כל תשובה נכונה - 6 נקודות.
♣ עבור כל תשובה שתסומן מעבר ל- 10 יורדו 6 נקודות .

♣ שאלות 7,8,9,10: 10 נקודות לכל אחת.
♣ רשמו את התשובות הסופיות במלבנים.
♣ גם רשמו את דרך פתרון (בקצרה). תשובה בלי דרך פתרון: 0 נקודות.

♣ העתיקו את תשובותכם לדף האחרון (שאותו תקחו איתכם).
♣ הדף האחרון מיועד עבורך לצורך בדיקת תשובותיך.
♣ יש להגיש את כל העמודים חוץ מהדף האחרון.
♣ מחברות טיוטה לא יבדקו. רק Xים בטבלה בדף הזה ודפים 8,7,6,5 יבדקו.

בהצלחה!

שם משפחה: מספר סטודנט:

גירסה: אובא3

תשובות לשאלות 6,5,4,3,2,1 (multiple choice)

	6	5	4	3	2	1	
א							א
ב							ב
ג							ג
ד							ד

1-6 (MAX = 60)	
7 (MAX = 10)	
8 (MAX = 10)	
9 (MAX = 10)	
10 (MAX = 10)	
ס"כ (MAX = 100)	

הדף הזה לא יבדק!! ייבדקו Xים בטבלה בדף מספר 1

♠ 1. נתבונן פולינום

$$P(z) = z^4 + z^2 + az + b, \quad z \in \mathbf{C}$$

עם מקדמים ממשיים $a, b \in \mathbf{R}$

איזו/אילו מבין הטענות הבאות נכונה/נכונות?

א. בהכרח ל־ $P(z)$ אין שורש לא ממשי מריבוי 2

ב. בהכרח ל־ $P(z)$ אין שורש מריבוי 3

ג. אם $a = 0$ ו־ $b \neq 0$ אז בהכרח ל־ $P(z)$ אין שורש מריבוי 2

ד. אם $b = 0$ ו־ $a \neq 0$ אז בהכרח ל־ $P(z)$ אין שורש מריבוי 2

♠ 2. נתון ש־ A מטריצה הפיכה,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbf{R}$$

איזו/אילו מבין הטענות הבאות נכונה/נכונות?

א. $detA \neq 1$ לכל $a \in \mathbf{R}$

ב. אם ב־ A יש איבר אפס אז בהכרח $a = 0$

ג. אם $A^2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ אז בהכרח $x_1 = a$

ד. אם $A^2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ אז בהכרח $x_1 = a$

הדף הזה לא יבדק!! ייבדקו Xים בטבלה בדף מספר 1

♠ 3. תהי A מטריצה ממשית 3×5 ו־ $b \in \mathbf{R}^3$. נתון שלמערכת המשוואות הליניאריות $Ax = b$ יש פתרונות

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$$

איזו/אילו מבין הטענות הבאות נכונה/נכונות?

א. אם הוקטורים v_1, v_2, v_3, v_4 הם בלתי תלוים לינארית אז בהכרח $rankA \leq 2$

ב. אם $a_1 = a_2 = 0$ אז בהכרח $rankA \leq 2$

ג. אם $a_2 = a_3 = 0$ אז בהכרח $rankA \leq 2$

ד. אם $a_3 = a_4 = 0$ אז בהכרח $rankA \leq 2$

♠ 4. יהיו V, W תת־מרחבים של $\mathbf{R}^4$,

$$V = \{x \in \mathbf{R}^4 : \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}, \qquad W = span\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \right\}$$

איזו/אילו מבין הטענות הבאות נכונה/נכונות?

א. אם $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ אז בהכרח $V \cap W \neq \{0\}$

ב. אם $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ אז בהכרח $V + W = \mathbf{R}^4$

ג. אם $V + W = \mathbf{R}^4$ אז בהכרח $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

ד. בהכרח $V \neq W$

הדף הזה לא ייבדק!! ייבדקו X בטבלה בדף מספר 1

♠ 5. יהי $Mat(2,2)$ המרחב הוקטורי של המטריצות הממשיות מסדר 2×2. נתבונן בתת־מרחב $V=\{A\in Mat(2,2):\ \ traceA=0\}$ ($trace$ זה סכום האיברים באלכסון)

איזו/אילו מבין הטענות הבאות נכונה/נכונות?

א. כל בסיס של V כלל מטריצה A כך ש־ $A^2\neq 0$

ב. אם $\{A_1,A_2,A_3\}$ הוא בסיס של V אז בהכרח $\{A_1-A_2,\ A_2-A_3,\ A_3-A_1\}$ הוא גם בסיס של V

ג. אם $\{A_1,A_2,A_3\}$ הוא בסיס של V אז בהכרח $\{A_1^t,\ A_2^t,\ A_3^t\}$ הוא גם בסיס של V

ד. אם $A_1,A_2,A_3,A_4\in V$, המטריצות A_1,A_2 הן בלתי תלויות לינארית והמטריצות A_3,A_4 הן גם בלתי תלויות לינארית אז בהכרח $span\{A_1,A_2\}\cap span\{A_3,A_4\}\neq\{0\}$

♠ 6. יהי $P_2[t]$ המרחב הוקטורי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל־2 עם מקדמים ממשיים, $Mat(2,2)$ המרחב הוקטורי של המטריצות הממשיות מסדר 2×2. נתבונן בטרנספורמציה הלינארית

$$T:\ \ P_2[t]\ \ \to\ \ Mat(2,2),\quad T(p(t))=\begin{pmatrix} p(\lambda_1) & p(\lambda_2)\\ p'(\lambda_1) & p'(\lambda_2)\end{pmatrix}$$

כאשר $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$ ו־ $\lambda_1\neq\lambda_2$.

איזו/אילו מבין הטענות הבאות נכונה/נכונות?

א. אם $\begin{pmatrix} 0 & 0\\ a & b\end{pmatrix}\in Im(T)$ אז בהכרח $a+b=0$

ב. אם $\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\in Im(T)$ אז בהכרח $a+2b=0$

ג. אם $\begin{pmatrix} 0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}\in Im(T)$ אז בהכרח $a-2b=0$

ד. אם $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in Im(T)$ אז בהכרח $\lambda_1-\lambda_2=0$

♠ 7. מצא את כל ה־ $n \in \{1,2,3,...\}$ כך ש־ $Re\Big((-1-\sqrt{3}\cdot i)^n\Big) > 0$

תשובה:

דרך פתרון (בקצרה)

♠ 8. נתבונן בטרנספורמציה הלינארית

$$T:\ \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^5, \quad T(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מצא דוגמא של מטריצה B כך ש־

$$Im(T) = \{v \in \mathbf{R}^5 :\ Bv = 0\}$$

תשובה

$B =$

דרך פתרון (בקצרה)

♠ 9. יהי $P_2[t]$ המרחב הוקטורי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל־2 עם מקדמים ממשיים. נתבונן באופרטור לינארי

$$T: \ P_2[t] \to P_2[t], \quad T(p(t)) = p(t) + p'(t) + p''(t)$$

מצא $\lambda \in \mathbf{R}$ ודוגמא של בסיס $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ של $P_2[t]$ כך שהמטריצה המיצגת את T בבסיס כזה היא

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

עזרה: T לא לכסין. מצאו λ ו־ $p_1(t)$
באמצעות העמודה הראשונה של המטריצה המייצגת.

תשובות: $\lambda =$

$p_1(t) =$ $p_2(t) =$ $p_3(t) =$

דרך פתרון (בקצרה)

♠ 10. יהי V המרחב הוקטורי מעל $\mathbf{C}$ של המטריצות קומפלקסיות סימטריות 2×2. נתבונן באופרטור לינארי

$$T: \ V \to V, \quad T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b & c \\ c & -b \end{pmatrix}$$

מצא מטריצות קומפלקסיות A_1, A_2, A_3 כך ש־ $\{A_1, A_2, A_3\}$ הוא בסיס של V והמטריצה המיצגת את T בבסיס כזה היא אלכסונית.

עזרה: ל־ T יש ערכים עצמיים לא ממשיים.

תשובה:

$A_1 =$ $\qquad$ $A_2 =$ $\qquad$ $A_3 =$

דרך פתרון (בקצרה)

גירסה: א1ב3א

תשובות לשאלות 6,5,4,3,2,1 (multiple choice)

	6	5	4	3	2	1	
א							א
ב							ב
ג							ג
ד							ד